Домашна работа 2 по ДИС 1. Компютърни науки, 1 курс, 2 поток

Камен Димитров Младенов, Група 6

20 Ноември 2021

Задача 1. Дадена е редицата

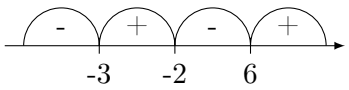
$$a_1 = \lambda,\ a_{n+1} = \frac{2a_n^2 - a_n + 6}{a_n - 6}$$

Да се изследва за сходимост спрямо стойностите на параметъра $\lambda \neq 6$.

Решение: Разглеждаме за монотонност:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n^2 - a_n + 6}{a_n - 6} - a_n = \frac{2a_n^2 - a_n + 6 - a_n^2 + 6a_n}{a_n - 6} = \frac{a_n^2 + 5a_n + 6}{a_n - 6} = \frac{(a_n + 3)(a_n + 2)}{a_n - 6}$$

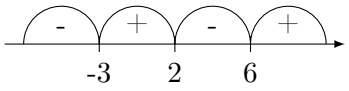
$\implies$ Корените за a_n са -3, -2 и 6



Разглеждаме положението на a_{n+1} спрямо -3, -2 и 6

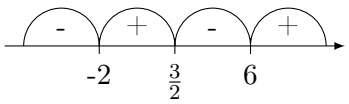
$$a_{n+1} - (-3) = \frac{2a_n^2 - a_n + 6}{a_n - 6} + 3 = \frac{2a_n^2 - a_n + 6 + 3a_n - 18}{a_n - 6} = \frac{2a_n^2 + 2a_n - 12}{a_n - 6}$$

$\implies$ Корените за a_n са -3, 2 и 6



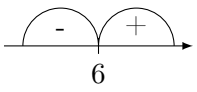
$$a_{n+1} - (-2) = \frac{2a_n^2 - a_n + 6}{a_n - 6} + 2 = \frac{2a_n^2 - a_n + 6 + 2a_n - 12}{a_n - 6} = \frac{2a_n^2 + a_n - 6}{a_n - 6}$$

$\implies$ Корените за a_n са -2, $\frac{3}{2}$ и 6



$$a_{n+1} - 6 = \frac{2a_n^2 - a_n + 6}{a_n - 6} - 6 = \frac{2a_n^2 - a_n + 6 - 6a_n + 36}{a_n - 6} = \frac{2a_n^2 - 7a_n + 42}{a_n - 6} > 0$$

$\implies$ Единствения корен за a_n е 6



Разглеждаме положението на a_{n+1} спрямо $\frac{3}{2}$ и 2

$$a_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{2a_n^2 - a_n + 6}{a_n - 6} - \frac{3}{2} = \frac{2a_n^2 - a_n + 6 - \frac{3}{2}a_n + 9}{a_n - 6} = \frac{2a_n^2 - \frac{5}{2}a_n + 15}{a_n - 6} > 0$$

$\implies$ Единствения корен за a_n е 6

$$a_{n+1} - 2 = \frac{2a_n^2 - a_n + 6}{a_n - 6} - 2 = \frac{2a_n^2 - a_n + 6 - 2a_n + 12}{a_n - 6} = \frac{2a_n^2 - 3a_n + 18}{a_n - 6} > 0$$

$\implies$ Единствения корен за a_n е 6

Разглеждаме положението на a_{n+1}

$$a_{n+1} = \frac{2a_n^2 - a_n + 6}{a_n - 6} > 0 \implies \text{Единствения корен за } a_n \text{ е } 6$$

a_n	$-\infty$	-3		-2		$\frac{3}{2}$		2		6	$+\infty$
$a_{n+1} - a_n$	-	0	+	0	-	⋮	-	⋮	-	0	+
$a_{n+1} - (-3)$	-	0	+	⋮	+	⋮	+	0	-	0	+
$a_{n+1} - (-2)$	-	⋮	-	0	+	0	-	⋮	-	0	+
a_{n+1}	-	⋮	-	⋮	-	⋮	-	⋮	-	0	+
$a_{n+1} - \frac{3}{2}$	-	⋮	-	⋮	-	⋮	-	⋮	-	0	+
$a_{n+1} - 2$	-	⋮	-	⋮	-	⋮	-	⋮	-	0	+
$a_{n+1} - 6$	-	⋮	-	⋮	-	⋮	-	⋮	-	0	+

1. Случай $\lambda < -3$ В този интервал $a_{n+1} < a_n$, следователно $a_{n+1} < -3$ и редицата е монотонно намаляваща, но не е ограничена отдолу. Тоест $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е сходяща.

2. Случай $\lambda = -3$ Пресмятаме, че $a_2 = -3$ и $a_3 = -3$. Ще докажем по индукция, че $a_n = -3$:

- *База:* Вярно за a_1, a_2, a_3
- *Индукционно предположение:* $a_{n-1} = -3$ за някое $n \geq 1$.
- *Индукционна стъпка:* $a_n \overset{def}{=\!=} \frac{2a_{n-1}^2 - a_{n-1} + 6}{a_{n-1} - 6} \overset{\text{ИП}}{=\!=} \frac{2 \cdot 9 + 3 + 6}{-3-6} = -3$

То тогава редицата е стационарна и следователно сходяща.

3. Случай $\lambda \in (-3, -2)$ Пресмятаме, че $a_2 \in (-3; -2)$ и $a_3 \in (-3; -2)$. Ще докажем по индукция, че $a_n \in (-3; -2)$:

- *База:* Вярно за a_1, a_2, a_3
- *Индукционно предположение:* $a_{n-1} \in (-3; -2)$ за някое $n \geq 1$.
- *Индукционна стъпка:* $a_n \overset{def}{=\!=} \frac{2a_{n-1}^2 - a_{n-1} + 6}{a_{n-1} - 6} \overset{\text{ИП}}{>} \frac{2(-3)^2 - (-3) + 6}{(-3) - 6} = -3$
  $\frac{2a_{n-1}^2 - a_{n-1} + 6}{a_{n-1} - 6} \overset{\text{ИП}}{<} \frac{2(-2)^2 - (-2) + 6}{(-2) - 6} = -2$

То тогава редицата е ограничена отдолу и отгоре. Следователно тя е сходяща.

4. Случай $\lambda = -2$ Пресмятаме, че $a_2 = -2$ и $a_3 = -2$. По индукция, следва че редицата е стационарна и следователно сходяща.

5. Случай $\lambda \in \left(-2, \frac{3}{2}\right)$ Пресмятаме, че $a_1, a_2 > -2$. Знаем, че $a_{n+1} < \frac{3}{2}$, тоест по индукция намираме, че $a_n \in \left(-2; \frac{3}{2}\right)$. То редицата е огрничена и следователно сходяща.

6. Случай $\lambda = \frac{3}{2}$ Пресмятаме, че $a_2 = -2$ и $a_3 = -2$. По индукция, следва че редицата е стационарна и следователно сходяща.

7. Случай $\lambda \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ Пресмятаме, че $a_2 \in (-3; -2)$ и $a_3 \in (-3; -2)$ и по индукция $a_n \in (-3; -2)$. Тоест редицата е ограничена и следователно сходяща.

8. Случай $\lambda = 2$ Пресмятаме, че $a_2 = -3$ и $a_3 = -3$. По индукция, следва че редицата е стационарна и следователно сходяща.

9. Случай $\lambda \in (2, 6)$ По индукция намираме, че $a_n < -3$. $a_{n+1} < a_n$, следователно редицата е монотонно намаляваща, но не е ограничена отдолу. Тоест не е сходяща.

10. Случай $\lambda > 6$ По индукция намираме, че $a_n > 6$. Знаем, че $a_{n+1} > a_n$, следователно редицата е монотонно растяща, но не е ограничена отгоре. Тоест не е сходяща.

Задача 2. Да се пресметне границата

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt[3]{4x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+7}-\sqrt[5]{x^4-3}}$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt[3]{4x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+7}-\sqrt[5]{x^4-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\cancel{x}\sqrt[3]{\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}}}{\cancel{x}\sqrt[4]{1+\frac{7}{x^4}}-\cancel{x}\sqrt[5]{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^4}}}=L$$

$$\sqrt{2}\xrightarrow[x\to\infty]{}\sqrt{2}\,,\ \frac{1}{x^2}\xrightarrow[x\to\infty]{}0\,,\ \frac{4}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0\,,\ \frac{1}{x^3}\xrightarrow[x\to\infty]{}0\,,$$
$$\sqrt[4]{1}\xrightarrow[x\to\infty]{}\sqrt[4]{1}\,,\ \frac{7}{x^4}\xrightarrow[x\to\infty]{}0\,,\ \frac{1}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0\,,\ \frac{3}{x^4}\xrightarrow[x\to\infty]{}0\qquad\Longrightarrow L=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{1}}=\boxed{\sqrt{2}}$$

Задача 3. Да се пресметне границата

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{5x+1}-\sqrt[4]{7x+1}}{\operatorname{arctg}(\ln(x+1))}$$

Решение:

$$\operatorname{arctg}(\ln(x+1))\sim\ln(x+1)\quad x\to0\qquad\sqrt[3]{5x+1}=\underbrace{(1+5x)^{\frac{1}{3}}-1}_{\sim\frac{5x}{3}\quad x\to0}+1\qquad\sqrt[4]{7x+1}=\underbrace{(1+7x)^{\frac{1}{4}}-1}_{\sim\frac{7x}{4}\quad x\to0}+1$$

$$\Longrightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{5x+1}-\sqrt[4]{7x+1}}{\operatorname{arctg}(\ln(x+1))}\overset{(\sim)}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{5x}{3}+1-\left(\frac{7x}{4}+1\right)}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{20x-21x}{12}}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}-\frac{x}{12\ln(x+1)}=L$$

$$\frac{x}{\ln(x+1)}\xrightarrow[x\to0]{}1\implies L=\boxed{-\frac{1}{12}}$$

Задача 4. Да се пресметне $f^{(n)}(x)$, където

$$f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1-7x}}$$

Решение:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-7x}}=(1-7x)^{-\frac{1}{2}}\qquad h(x)=x^3\qquad\Longrightarrow f(x)=g(x)\cdot h(x)$$

$$\begin{aligned}g^{(n)}(x)=\left((1-7x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(n)}&=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-n}\cdot7^n\cdot(1-7x)^{-\frac{2n+1}{2}}=\\&=\frac{(-1)(-3)(-5)\cdots(-1-2n+2)}{2^n}\cdot x^{-\frac{1}{2}-n}\cdot7^n\cdot(1-7x)^{-\frac{2n+1}{2}}=\\&=\frac{(-1)(-3)\cdots(1-2n)}{2^n}\cdot x^{-\frac{1+2n}{2}}\cdot7^n\cdot(1-7x)^{-\frac{2n+1}{2}}\end{aligned}$$

$$h^{(0)}(x)=h(x)=x^3\quad h'(x)=3x^2\quad h''(x)=6x\quad h'''(x)=6\quad h^{IV}(x)=0\qquad\Longrightarrow h^{(n)}(x)=0\quad n\geq4$$

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} g^{(n-k)}h^{(k)} = \binom{n}{0}g^{(n)}h^{(0)} + \binom{n}{1}g^{(n-1)}h^{(1)} + \binom{n}{2}g^{(n-2)}h^{(2)} + \binom{n}{3}g^{(n-3)}h^{(3)} +$$
$$+ \underbrace{\binom{n}{4}g^{(n-4)}h^{(4)} + \cdots + \binom{n}{0}g^{(0)}h^{(n)}}_{0} =$$
$$= 1 \cdot \frac{(-1)(-3)\cdots(1-2n)}{2^n}\, x^{-\frac{1+2n}{2}}\, 7^n\, (1-7x)^{-\frac{2n+1}{2}} \cdot x^3$$
$$+ n \cdot \frac{(-1)(-3)\cdots(3-2n)}{2^{n-3}}\, x^{-\frac{2n-1}{2}}\, 7^{n-1}\, (1-7x)^{-\frac{2n-1}{2}} \cdot 3x^2$$
$$+ \frac{n!}{2(n-2)!} \cdot \frac{(-1)(-3)\cdots(5-2n)}{2^{n-2}}\, x^{-\frac{2n-3}{2}}\, 7^{n-5}\, (1-7x)^{-\frac{2n-2}{2}} \cdot 6x$$
$$+ \frac{n!}{6(n-3)!} \cdot \frac{(-1)(-3)\cdots(7-2n)}{2^{n-3}}\, x^{-\frac{2n-5}{2}}\, 7^{n-3}\, (1-7x)^{-\frac{2n-7}{2}} \cdot 6 =$$
$$= \frac{(-1)(-3)\cdots(1-2n)}{2^n}\, x^{-\frac{2n-5}{2}}\, 7^n\, (1-7x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$
$$+ 3n \cdot \frac{(-1)(-3)\cdots(3-2n)}{2^{n-1}}\, x^{-\frac{2n-5}{2}}\, 7^{n-1}\, (1-7x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$
$$+ 3\frac{n!}{(n-2)!} \cdot \frac{(-1)(-3)\cdots(5-2n)}{2^{n-2}}\, x^{-\frac{2n-7}{2}}\, 7^{n-5}\, (1-7x)^{-\frac{2n-2}{2}}$$
$$+ \frac{n!}{(n-3)!} \cdot \frac{(-1)(-3)\cdots(7-2n)}{2^{n-3}}\, x^{-\frac{2n-2}{2}}\, 7^{n-3}\, (1-7x)^{-\frac{2n-7}{2}}$$

Задача 5. Да се пресметне границата

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{\sin x}{\arcsin x}\right)\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{\arcsin x}\right)} = e^l$$

$$l = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{\arcsin x}\right) \qquad \ln\left(\frac{\sin x}{\arcsin x} - 1 + 1\right) \sim \frac{\sin x}{\arcsin x} - 1 \quad x \to 0$$
$$\Longrightarrow\ l \overset{(\sim)}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{\arcsin x} - 1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x - \arcsin x}{\arcsin x}\right) \qquad \arcsin x \sim x \quad x \to 0$$
$$\Longrightarrow\ l \overset{(\sim)}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x - \arcsin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \arcsin x}{x^3} \overset{\text{Лопитал}\left[\frac{0}{0}\right]}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left((1-x^2)\right)' = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$\Longrightarrow\ l \overset{\text{Лопитал}\left[\frac{0}{0}\right]}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6x}$$
$$\left(x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)' = \left(\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)' = \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}2x\cdot x}{(1-x^2)^3} = \frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + 3x^2\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^3} =$$
$$= \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$\Longrightarrow\ l \overset{\text{Лопитал}\left[\frac{0}{0}\right]}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x - \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}}{6} \qquad \cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \Longrightarrow\ l = -\frac{1}{3}$$

Следователно, търсената граница е: $e^l = e^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$